2004 年全国硕士研究生入学统一考试理工

数学二试题详解及评析

一. 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上. ）

（1） 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$______ .

【答】 0

【详解】显然当 $x=0$ 时，$f(x)=0$；

当 $x\neq 0$ 时， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-\frac{1}{n})x}{x^2+\frac{1}{n}}=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$，

所以 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty\neq f(0)$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

（2） 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为_______.

【答】 $(-\infty,1)$ （或 $(-\infty,1]$ ）

【详解】 由题意得：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=1-\frac{2}{t^2+1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)'\cdot\frac{1}{3(t^2+1)}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3},$$

令 $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0 \Rightarrow \quad t<0$.

又 $x=t^3+3t+1$ 单调增，在 $t<0$ 时，$x\in(-\infty,1)$。($\because t=0$ 时，$x=1\Rightarrow x\in(-\infty,1]$ 时，曲线凸.)

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$______.

【答】 $\frac{\pi}{2}$

【详解】 方法一：

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{x=\sec t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot\tan t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}.$$

【详解】 方法二：

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int_1^0\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}(-\frac{1}{t^2})dt=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

(4) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$______.

【答】 2

【详解】 方法一：

在 $z=e^{2x-3z}+2y$ 的两边分别对 x , y 求偏导, z 为 x,y 的函数.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3z}(2-3\frac{\partial z}{\partial x}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x-3z}(-3\frac{\partial z}{\partial y})+2,$$

从而 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$$

所以 $$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2\cdot\frac{1+e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}=2$$

方法二：

令 $F(x,y,z)=e^{2x-3z}+2y-z=0$

则 $\frac{\partial F}{\partial x}=e^{2x-3z}\cdot 2$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2$, $\frac{\partial F}{\partial z}=e^{2x-3z}(-3)-1$

$$\therefore\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{e^{2x-3z}\cdot 2}{-(1+3e^{2x-3z})}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{2}{-(1+3e^{2x-3z})}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}},$$

从而 $$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2\left(\frac{3e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}+\frac{1}{1+3e^{2x-3z}}\right)=2$$

方法三：

利用全微分公式，得

$$dz=e^{2x-3z}(2dx-3dz)+2dy$$

$$=2e^{2x-3z}dx+2dy-3e^{2x-3z}dz$$

$$(1+3e^{2x-3z})dz=2e^{2x-3z}dx+2dy$$

$$\therefore\ dz=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}dx+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}dy$$

即 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$$

从而 $$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2$$

(5) 微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y\big|_{x=1}=\frac{6}{5}$ 的特解为______.

【答】 $y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}$

【详解】 方法一：

原方程变形为 $$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2}x^2,$$

先求齐次方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=0$ 的通解:

$$\frac{dy}{y}=\frac{1}{2x}dx$$

积分得 $$\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\ln c\quad\Rightarrow\quad y=c\sqrt{x}$$

设 $y=c(x)\sqrt{x}$ 为非齐次方程的通解，代入方程得

$$c'(x)\sqrt{x}+c(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}c(x)\sqrt{x}=\frac{1}{2}x^2$$

从而 $c'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$，

积分得 $c(x)=\int \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx+C=\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$,

于是非齐次方程的通解为

$$y=\sqrt{x}(\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C)=C\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$$

$$y\big|_{x=1}=\frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad C=1,$$

故所求通解为 $y=\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$.

方法二：

原方程变形为 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2}x^2$,

由一阶线性方程通解公式得

$$y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}\left[\int \frac{1}{2}x^2 e^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{\frac{1}{2}\ln x}\left[\int \frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{1}{2}\ln x}dx+C\right]$$

$$=\sqrt{x}\left[\int \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx+C\right]=\sqrt{x}\left[\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C\right]$$

$$y(1)=\frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad C=1,$$

从而所求的解为 $y=\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$.

（6）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，则 $|B|=$________.

【答】 $\frac{1}{9}$

【详解】 方法一：

$$ABA^*=2BA^*+E \quad \Leftrightarrow \quad ABA^*-2BA^*=E,$$

$$\Leftrightarrow \quad (A-2E)BA^*=E,$$

$$\therefore \ |A-2E||B||A^*|=|E|=1,$$

$$|B|=\frac{1}{|A-2E||A^*|}=\frac{1}{\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}|A|^2}=\frac{1}{(-1)\cdot(-1)3^2}=\frac{1}{9}.$$

【详解】 方法二：

由 $A^*=|A|A^{-1}$,得

$$ABA^*=2BA^*+E \quad\Rightarrow\quad AB|A|A^{-1}=2B|A|A^{-1}+AA^{-1}$$

$$\Rightarrow\quad |A|AB=2|A|B+A$$

$$\Rightarrow\quad |A|(A-2E)B=A \quad\Rightarrow\quad |A|^3|A-2E||B|=|A|$$

$$\therefore\ |B|=\frac{1}{|A|^2|A-2E|}=\frac{1}{9}$$

二. 选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内. ）

（7）把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2dt$, $\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$, $\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

（A） α,β,γ. （B） α,γ,β.

（C） β,α,γ. （D） β,γ,α.

【 】

【答】 应选（B）

【详解】 $\because\ \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt}{\int_0^x\cos t^2dt}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{2}=0\ ,$$

即 $\gamma=\mathrm{o}(\alpha)$.

又 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x^2}{\frac{1}{2}x}=0$,

即 $\beta=\mathrm{o}(\gamma)$.

从而按要求排列的顺序为α、γ、β，故选（B）.

（8）设 $f(x)=|x(1-x)|$，则

（A） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（B） $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（C） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D） $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【 】

【答】 应选（C）

【详解】 $f(x)=\begin{cases}-x(1-x), & -1<x\le 0\\ x(1-x), & 0<x<1\end{cases}$，

$$f'(x)=\begin{cases}-1+2x, & -1<x<0\\ 1-2x, & 0<x<1\end{cases},$$

$$f''(x)=\begin{cases}2, & -1<x<0\\ -2, & 0<x<1\end{cases},$$

从而$-1<x<0$时，$f(x)$凹，$1>x>0$时，$f(x)$凸，于是$(0,0)$为拐点.

又 $f(0)=0$，$x\neq 0$、1时，$f(x)>0$，从而$x=0$为极小值点.

所以，$x=0$是极值点，$(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点，故选（C）.

（9） $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$ 等于

（A） $\int_1^2 \ln^2 x dx$.　　（B） $2\int_1^2 \ln x dx$.

（C） $2\int_1^2 \ln(1+x)dx$.　　（D） $\int_1^2 \ln^2(1+x)dx$

【 】

【答】 应选（B）

【详解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})\right]^{\frac{2}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+(1+\frac{n}{n})\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}$$

$$=2\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$\underline{\underline{1+x=t}}\ 2\int_1^2\ln t\,dt=2\int_1^2\ln x\,dx$$

故选（B）.

（10）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得

（A） $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

（B） $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减小.

（C）对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

（D）对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

【 】

【答】 应选（C）

【详解】由导数的定义知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}>0,$$

由极限的性质，$\exists\delta>0$，使 $|x|<\delta$ 时，有

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$$

即 $\delta>x>0$ 时， $f(x)>f(0)$，

$-\delta<x<0$ 时， $f(x)<f(0)$，

故选（C）.

（11）微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为

（A） $y*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.

（B） $y*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.

（C） $y*=ax^2+bx+c+A\sin x$.

（D） $y*=ax^2+bx+c+A\cos x$

【 】

【答】 应选（A）

【详解】对应齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为

$$\lambda^2+1=0,$$

特征根为 $\lambda=\pm i$，

对 $y''+y=x^2+1=e^0(x^2+1)$ 而言，因 0 不是特征根，从而其特解形式可设为

$$y_1^*=ax^2+bx+c$$

对 $y''+y=\sin x=I_m(e^{ix})$，因 i 为特征根，从而其特解形式可设为

$$y_2^*=x(A\sin x+B\cos x)$$

从而 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为

$$y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$$

（12）设函数 $f(u)$ 连续，区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2y\right\}$，则 $\iint\limits_D f(xy)dxdy$ 等于

（A）$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)dy$.

（B）$2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)dx$.

（C）$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$.

（D）$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr$

【 】

【答】 应选（D）

【详解】积分区域见图.

在直角坐标系下，

$$\iint\limits_D f(xy)dxdy=\int_0^2 dy\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}}f(xy)dx$$

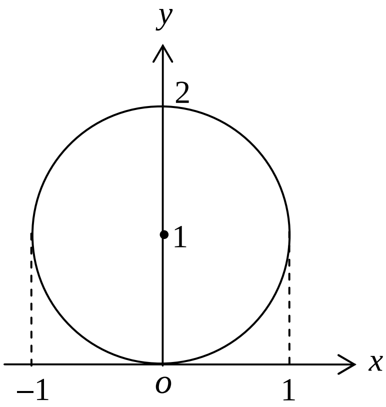
$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(xy)dy$$

故应排除（A）、（B）.

在极坐标系下，$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，

$$\iint_D f(xy)dxdy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta\cos\theta) r dr,$$

故应选（D）.



（13）设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为

（A）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　（B）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.　　（D）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

【 】

【答】 应选（D）

【详解】 由题意 $B = A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$C = B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$$\therefore\ C = A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = AQ,$$

从而 $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，故选（D）.

（14）设 A, B 为满足 $AB = 0$ 的任意两个非零矩阵，则必有

（A）A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

（B）A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

（C）A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

（D）A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

【 】

【答】 应选（A）

【详解】 方法一：

设 $A=(a_{ij})_{l\times m}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$，记

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_m\end{pmatrix}$$

$$AB=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ . & . & \cdots & .\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}b_{11}A_1+\cdots+b_{m1}A_m & \cdots & b_{1n}A_1+\cdots+b_{mn}A_m\end{pmatrix}=0 \qquad (1)$$

由于 $B\neq 0$，所以至少有一 $b_{ij}\neq 0\,(1\leq i\leq m,1\leq j\leq n)$，

从而由（1）知，$b_{1j}A_1+b_{2j}A_2+\cdots+b_{ij}A_i+\cdots+b_{m1}A_m=0$，

于是 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 线性相关.

又记 $B=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ \vdots\\ B_m\end{pmatrix}$， 则

$$AB=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ . & . & \cdots & .\\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ \vdots\\ B_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}B_1+a_{12}B_2+\cdots+a_{1m}B_m\\ a_{21}B_1+a_{22}B_2+\cdots+a_{2m}B_m\\ \cdots\\ a_{l1}B_1+a_{l2}B_2+\cdots+a_{lm}B_m\end{pmatrix}=0$$

由于 $A\neq 0$，则至少存在一 $a_{ij}\neq 0\,(1\leq i\leq l,1\leq j\leq m)$，使

$$a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+a_{ij}B_j+\cdots+a_{im}B_m=0,$$

从而 $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 线性相关，

故应选（A）.

方法二：

设 A 为 m×n 矩阵，B 为 n×s 矩阵，则由 AB ＝0 知，

$$r(A)+r(B)<n.$$

又 A、B 为非零矩阵，所以 $r(A)>0$, $r(B)>0$, 从而 $r(A)<n$, $r(B)<n$，即 A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关，故应选（A）.

三. 解答题（本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

（15）（本题满分 10 分）

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

【详解】 方法一：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}$$

【详解】 方法二：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在（$-\infty,+\infty$）上有定义，在区间$[0,2]$上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的x都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中k为常数.

(Ⅰ)写出 $f(x)$ 在$[-2,0]$上的表达式;

(Ⅱ)问k为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

【详解】(Ⅰ)当$-2\le x<0$，即$0\le x+2<2$时，

$$f(x)=kf(x+2)=k(x+2)[(x+2)^2-4]=kx(x+2)(x+4).$$

(Ⅱ)由题设知 $f(0)=0$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-4)}{x}=-4$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)}{x}=8k.$$

令 $f'_-(0)=f'_+(0)$，得 $k=-\frac{1}{2}$.

即当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

（17）（本题满分 11 分）

设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$,

(Ⅰ)证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

(Ⅱ)求 $f(x)$ 的值域.

【详解】（Ⅰ） $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|dt$,

设 $t=u+\pi$，则有

$$f(x+\pi)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|du=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|du=f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(Ⅱ)因为 $|\sin x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且周期为 π，故只需在 $[0,\pi]$ 上讨论其值域.

因为

$$f'(x)=\left|\sin(x+\frac{\pi}{2})\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|,$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$，且

$$f(\frac{\pi}{4})=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\,dt=\sqrt{2},$$

$$f(\frac{3\pi}{4})=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|dt=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\,dt-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin t\,dt=2-\sqrt{2},$$

又 $f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=1$，$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\,dt=1$,

$\therefore\ f(x)$ 的最小值是 $2-\sqrt{2}$，最大值是 $\sqrt{2}$，故 $f(x)$ 的值域是 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

（18）（本题满分 12 分）

曲线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0, x=t\,(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体，其体积为 $V(t)$，侧面积为 $S(t)$，在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(Ⅰ)求 $\dfrac{S(t)}{V(t)}$ 的值;

(Ⅱ)计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$.

【详解】 (Ⅰ) $S(t)=\int_0^t 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx,$$

$$V(t)=\pi\int_0^t y^2dx=\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx,$$

$$\therefore\ \frac{S(t)}{V(t)}=2.$$

(Ⅱ) $F(t)=\pi y^2\Big|_{x=t}=\pi\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2$,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{F(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx}{\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}=1$$

（19）（本题满分 12 分）

设$e<a<b<e^2$，证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

【详证】 方法一：

设$\varphi(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x$，则

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}$$

$$\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2},$$

所以当$x>e$时，$\varphi''(x)<0$，故$\varphi'(x)$单调减小，从而当$e<x<e^2$时,

$$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0,$$

即当$e<x<e^2$时，$\varphi(x)$单调增加.

因此，当$e<a<b<e^2$时，$\varphi(b)>\varphi(a)$，即

$$\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a$$

故 $$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

方法二：

设$\varphi(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\frac{4}{e^2}(x-a)$，则

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}$$

$$\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2},$$

$\therefore\ x>e$时，$\varphi''(x)<0\quad\Rightarrow\varphi'(x)\searrow$，从而当$e<x<e^2$时,

$$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0,$$

$\Rightarrow e<x<e^2$时，$\varphi(x)$单调增加.

$\Rightarrow e<a<b<e^2$时，$\varphi(x)>\varphi(a)=0$。令$x=b$有$\varphi(b)>0$

即 $$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

方法三：

对函数$\ln^2 x$在$[a,b]$上应用拉格朗日定理，得

$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)，\quad a<\xi<b.$$

设$\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$，则$\varphi'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$,

当$t>e$时，$\varphi'(t)<0$，所以$\varphi(t)$单调减小，

从而$\varphi(\xi)>\varphi(e^2)$，即

$$\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2},$$

故
$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$$

（20）（本题满分 11 分）

某种飞机在机场降落时，为了减小滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下来.

现有一质量为$9000kg$的飞机，着陆时的水平速度为$700km/h$.经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为$k=6.0\times10^6$）.问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？

注 kg表示千克，km/h表示千米/小时.

【详解】 方法一：

由题设，飞机的质量$m=9000kg$，着陆时的水平速度$v_0=700km/h$.从飞机接触跑道开始记时，设t时刻飞机的滑行距离为$x(t)$，速度为$v(t)$.

根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{dv}{dt}=-kv.$$

又
$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx},$$

$$\therefore\ dx=-\frac{m}{k}dv,$$

积分得
$$x(t)=-\frac{m}{k}v+C,$$

由于$v(0)=v_0, x(0)=0$，故得$C=\frac{m}{k}v_0$，从而

$$x(t)=\frac{m}{k}(v_0-v(t)).$$

当 $v(t)\to 0$ 时，

$$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=\frac{9000\times 700}{6.0\times 10^6}=1.05\,(km)\ .$$

所以，飞机滑行的最长距离为 $1.05\ km$.

方法二：

根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{dv}{dt}=-kv\ .$$

所以 $$\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt\ ,$$

两边积分得 $$v=Ce^{-\frac{k}{m}t},$$

代入初始条件 $v\big|_{t=0}=v_0$，得 $C=v_0$，

$$\therefore\ v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t},$$

故飞机滑行的最长距离为

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)dt=-\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05\,(km)\ .$$

方法三：

根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}\ ,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=0\ ,$$

其特征方程为 $$r^2+\frac{k}{m}r=0\ ,$$

解得 $r_1=0$，$r_2=-\dfrac{k}{m}$，

故 $$x=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}\ ,$$

由 $x(0)=0$，$v(0)=\dfrac{dx}{dt}\bigg|_{t=0}=-\dfrac{kC_2}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\bigg|_{t=0}=v_0$，得 $C_1=-C_2=\dfrac{mv_0}{k}$，

$$\therefore\ x(t)=\frac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})\ .$$

当 $t\to+\infty$ 时，

$$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=\frac{9000\times 700}{6.0\times 10^6}=1.05\,(km)\ .$$

所以,飞机滑行的最长距离为$1.05\,km$.

（21）（本题满分 10 分）

设$z=f(x^2-y^2,e^{xy})$,其中 f 具有连续二阶偏导数,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【详解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot xe^{xy}]+e^{xy}f_2'+xye^{xy}f_2'$$

$$+ye^{xy}[f_{21}''\cdot(-2y)+f_{22}''\cdot xe^{xy}]$$

$$=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)e^{xy}f_{12}''++xye^{2xy}f_{22}''+e^{xy}(1+xy)f_2'\ .$$

（22）（本题满分 9 分）

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$$

试问a取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

【详解】 方法一：

对方程组的系数矩阵A作初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2+a & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3+a & 3\\ 4 & 4 & 4 & 4+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ -2a & a & 0 & 0\\ -3a & 0 & a & 0\\ -4a & 0 & 0 & a\end{pmatrix}=B$$

当$a=0$时，$r(A)=1<4$，故方程组有非零解，其同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0.$$

由此得基础解系为

$$\eta_1=(-1,1,0,0)^T\ ,\ \ \eta_2=(-1,0,1,0)^T\ ,\ \ \eta_3=(-1,0,0,1)^T\ ,$$

于是所求方程组的通解为

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3，其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.$$

当 $a \neq 0$ 时,

$$B \to \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+10 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

当 $a = -10$ 时，$r(A) = 3 < 4$，故方程组也有非零解，其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_4 = 0, \end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\eta = (1, 2, 3, 4)^T,$$

所以所求方程组的通解为 $x = k\eta$，其中 k 为任意常数.

方法二：

方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix} = (a+10)a^3.$$

当 $|A| = 0$，即 $a = 0$ 或 $a = -10$ 时，方程组有非零解.

当 $a = 0$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故方程组的同解方程组为

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

其基础解系为

$$\eta_1 = (-1, 1, 0, 0)^T，\eta_2 = (-1, 0, 1, 0)^T，\eta_3 = (-1, 0, 0, 1)^T,$$

于是所求方程组的通解为

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3，其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.$$

当 $a=-10$ 时，对 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}-9&1&1&1\\2&-8&2&2\\3&3&-7&3\\4&4&4&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-9&1&1&1\\20&-10&0&0\\30&0&-10&0\\40&0&0&-10\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-9&1&1&1\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix}$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_2=2x_1,\\x_3=3x_1,\\x_4=4x_1,\end{cases}$$

其基础解系为 $\eta=(1,2,3,4)^T$，

所以所求方程组的通解为 $x=k\eta$，其中 k 为任意常数.

（23）（本题满分 9 分）

设矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.

【详解】 A 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&2-\lambda&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&\lambda-3&3\\-1&-a-1&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根，则有 $2^2-16+18+3a=0$，解得 $a=-2$.

当 $a=-2$ 时，A 的特征值为 2, 2, 6，矩阵 $2E-A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}$ 的秩为 1，

故 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量有两个，从而 A 可相似对角化.

若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方，

从而 $18+3a=16$，解得 $a=-\frac{2}{3}$.

当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，A 的特征值为 2, 4, 4，矩阵 $2E-A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2，

故 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量只有一个，从而 A 不可相似对角化.